Előkészítés:

A bizonyítás legelején hasznos megismerkednünk a maradékosztályok fogalmával. Nézzünk meg egy konkrét példát, amin keresztül egyértelművé válik nagyon gyorsan ez a fogalom:

Amikor a számok maradékait vizsgáljuk egy adott számmal osztva, akkor jönnek képbe a maradékosztályok. Teszem azt, szemléljük a pozitív egész számok halmazának elemeit a kettővel oszthatóság szemszögéből. Ekkor a kettővel osztásnak kétféle maradéka lehet: nulla - ekkor osztható kettővel a szám, egy - ekkor egyet ad maradékul. Ebben a helyzetben a kettővel való oszthatóság két maradékosztályt határoz meg, s minden pozitív egész szám besorolható valamelyikbe. Ha a hetest vizsgáljuk, akkor ő az egy maradékot adó maradékosztályba tartozik, míg a tizennégy a nullát maradékul adó maradékosztályba.

Most pedig jöjjön a bizonyítandó állítás és annak bizonyítása.

Állítás: Minden pozitív n egész számra teljesül, hogy az $n^7 - n$ kifejezés osztható héttel.
(Matekosabban: $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : 7 \mid n^7 - n$*)*

Bizonyítás:

A nevezetes azonosságok alkalmazása után a kifejezést az alábbi alakban tudjuk szorzattá alakítani:
$n^7 - n = n(n^3 - 1)(n^3 + 1)$
Ezt követően vizsgáljuk meg n-t a 7 maradékosztályai szerint:

I. $7 \mid n \implies n = 7k$ alakú. Ekkor $n(n^3 - 1)(n^3 + 1) = 7k\big((7k)^3 - 1\big)\big((7k)^3 + 1\big)$.
Mivel szorzat valamely tényezője osztható héttel, ezért maga a szorzat is osztható lesz héttel.

II. $7 \nmid n$ esetén hat alesetünk van a héttel osztási maradékok szerinti osztályokba sorolva:

a) $n = 7k + 1$, azaz egy maradékot ad
$n^3 = (7k + 1)^3 = 343k^3 + 21k^2 + 21k + 1$
$n^3 - 1 = (7k + 1)^3 - 1 = 343k^3 + 21k^2 + 21k$
Mivel $7 \mid n^3 - 1$ (hiszen minden tag együtthatója osztható héttel), ezért a szorzat is osztható lesz héttel.

b) $n = 7k + 2$, azaz kettő maradékot ad
$n^3 = (7k + 2)^3 = 343k^3 + 42k^2 + 42k + 8$
$n^3 - 1 = 343k^3 + 42k^2 + 42k + 7$
Mivel $7 \mid n^3 - 1$, ezért a vizsgált szorzat is osztható lesz héttel.

Ha az imént vizsgált két esetet megtekintjük, rájöhetünk, hogy a kifejezések zárójelfelbotnása esetén minden vegyes tag együtthatója osztható lesz 7-tel, kivéve a konstans tagot. Emiatt érdemes csupán a konstans tagokat megvizsgálni a későbbiek során.

c) $n = 7k + 3 \implies 3^3 = 27$

$7 \mid (27 + 1) \implies 7 \mid n^3 + 1 \implies 7 \mid n(n^3 + 1)(n^3 - 1)$

d) $n = 7k + 4 \implies 4^3 = 64$

$7 \mid (64 - 1) \implies 7 \mid n^3 - 1 \implies 7 \mid n(n^3 + 1)(n^3 - 1)$

e) $n = 7k + 5 \implies 5^3 = 125$

$7 \mid (125 + 1) \implies 7 \mid n^3 + 1 \implies 7 \mid n(n^3 + 1)(n^3 - 1)$

f) $n = 7k + 6 \implies 6^3 = 216$

$7 \mid (216 + 1) \implies 7 \mid n^3 + 1 \implies 7 \mid n(n^3 + 1)(n^3 - 1)$

Minden maradékoztályban lesz olyan tényezője az $n(n^2 - 1)(n^3 + 1)$ szorzatnak, ami osztható 7-tel.

Ha egy szorzat egy tényezője osztható ‘-tel, akkor maga a szorzat is osztható lesz 7-tel.

Ezzel beláttuk, hogy minden pozitív n egész számra teljesül, hogy az $n^7 - n$ kifejezés osztható héttel.

□